

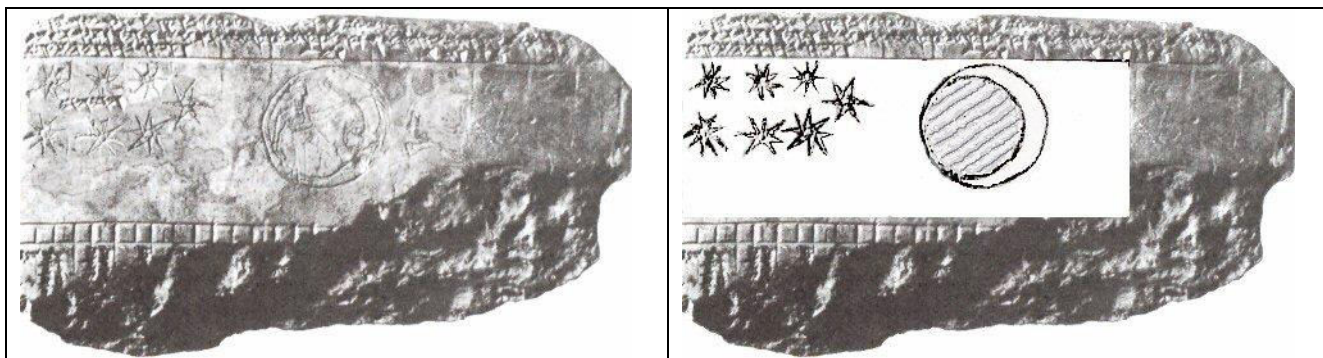
IX НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

<http://astro-olymp.org>

II кръг решения
19 февруари 2006 г.

Ученици от 9-10 клас

1 задача. Първите астрономически текстове, достигнали до нас, са от началото на второто хилядолетие преди новата ера и са написани върху глинени плочки. На една от тези глинени плочки е нарисувано астрономическо явление, което е направило впечатление на древните астрономи – Луната малко преди да премине пред Плеядите. Ако това събитие наистина се е случило преди 4000 години, то през коя част от денонощието бихме го наблюдавали? Кога през годината би било това?



Решение:

Луната е нарисувана като тънък сърп с изпъкнала страна, обърната надясно. Така изглежда тя няколко дни след новолуние. Слънцето се намира на неголямо видимо ъглово разстояние още по-надясно (западно) от нея. Тъй като се виждат и Плеядите, то очевидно Слънцето е залязло и Луната се наблюдава над западния хоризонт в ранните вечерни часове.

Поради обикалянето на Луната около Земята, Луната извършва видимо движение на фона на звездите от запад на изток с период около 27 денонощия (сидеричен месец). Възрастта на Луната, както е изобразена на плочката, е 3-4 дни след новолуние. Следователно Слънцето е изостанало на около един и половина или два зодиакални знака западно от Луната. Луната е близо до звездния куп Плеяди, който е в границите на съзвездието Бик. Можем да предположим в такъв случай, че Слънцето се намира примерно в Риби. Зодиакалният знак Риби съответства на края на февруари – март. Така е съгласно астрологическата традиция. Но тя датира от преди 2000 години. Тогава в края на февруари – март Слънцето наистина е било в Риби. Но преди 4000 години, или още 2000 години по-рано, в същия месец от годината Слънцето не би било в Риби, а на изток от Риби. Това е поради прецесията на земната ос. Величината на изместването можем да преценим приблизително, като имаме предвид, че периодът на прецесия е 26 000 години. Две хиляди години са $1/13$ от този период, зодиакалните съзвездия са 12, което означава, че изместването ще бъде с около едно зодиакално съзвездие. Можем да заключим, че Слънцето тогава през март е било в съседното на Риби съзвездие на изток, т.е. в Овен, а в Риби е било през предния месец февруари. Следователно явлението е

трябвало да се наблюдава от древните астрономи приблизително през февруари (както и да са наричали те този месец тогава).

2 задача. В III век преди новата ера се смятало, че Слънцето извършва годишно движение на фона на звездите по кръгова орбита около Земята, като при това движението му е равномерно. За да обясни наблюдаваната различна продължителност на четирите годишни времена, математикът Аполоний предположил, че Земята не е точно в центъра на слънчевата орбита, а Хипарх дори изчислил какво трябва да е отместването.

Начертайте въображаемата кръгова орбита на Слънцето около Земята. Отбележете върху нея началните моменти на сезоните в съответния мащаб. Определете графично къде трябва да е положението на Земята, отместено от центъра на слънчевата орбита.

Решение:

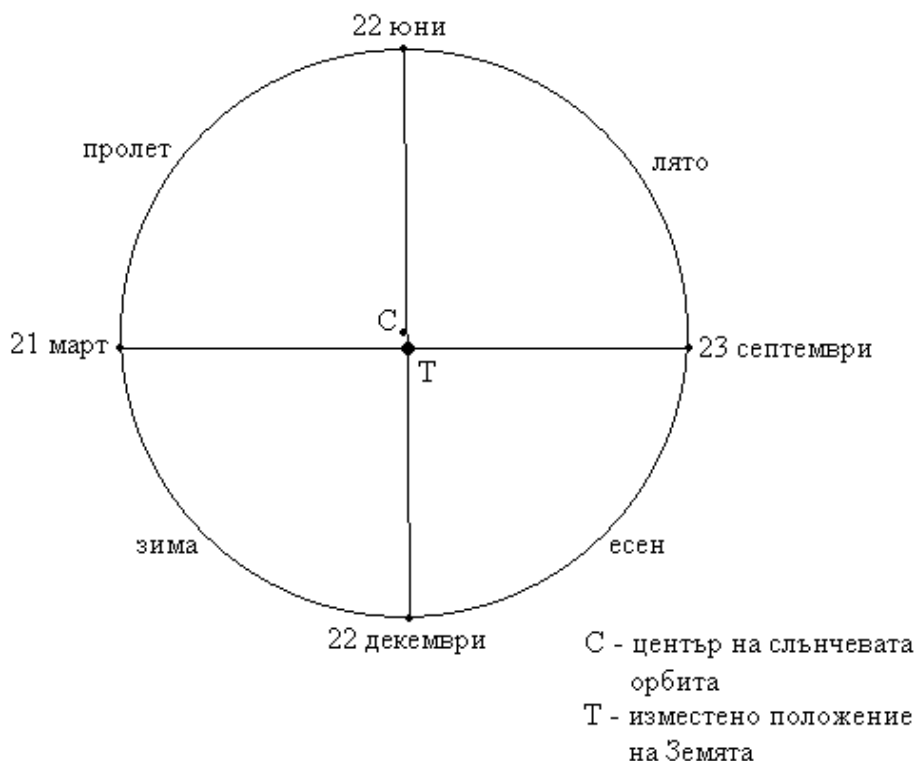
Астрономическата пролет започва на 21 март, лятото – на 22 юни, есента – на 23 септември, а зимата – на 22 декември. Това са средни дати, като действителните дати за всяка година могат да варират с един-два дни около тях, в зависимост от това колко години са изминали от последната високосна година. Приемаме, че в годината има 365 дни. Можем да пресметнем, че различните сезони имат приблизително следната продължителност:

пролет	93 дни	лято	93 дни
есен	90 дни	зима	89 дни

Според древногръцките представи, за една година Слънцето прави една обиколка на фона на неподвижните звезди по кръговата си орбита около Земята, като се движи равномерно. Пресмятаме колко градуса изминава то през различните сезони. За пролетта те са:

$$93 \text{ дни} \times 360^\circ / 365 \text{ дни} \approx 91^\circ.7,$$

за лятото – $91^\circ.7$, за есента – $88^\circ.8$, за зимата – $87^\circ.8$. Начертаваме кръговата орбита на Слънцето и като използваме стойностите на тези ъгли, с помощта на транспортир нанасяме на нея точки, съответстващи на началните моменти на сезоните.



За начален момент на пролетта се счита моментът, когато Слънцето застане относно Земята в положение, при което земната ос е ориентирана спрямо Слънцето така, че терминаторът на Земята (линията, разделяща осветената част на земното кълбо и неосветената) да преминава през двата земни полюса. За земния наблюдател това става, когато Слънцето преминава през пролетната равноденствена точка – една от пресечните точки на небесния екватор с еклиптиката. Съответно есента започва, когато отново Слънцето застане относно Земята в подобно положение, но на противоположната страна на слънчевата орбита спрямо Земята. Това става, когато Слънцето преминава през есенната равноденствена точка, която е другата пресечна точка на небесния екватор с еклиптиката. Тъй като равноденствените точки са противоположни една на друга върху небесната сфера, то Земята трябва да лежи на правата, която ги свързва. Ето защо, първата стъпка към определянето на изместеното положение на Земята е да начертаям тази права, като свържем съответните точки върху окръжността. Лятото в северното полукукло на Земята започва, когато земната ос е ориентирана спрямо Слънцето така, че Северният полюс да е най-добре огрят от него (за наблюдател на Северния полюс Слънцето да е в горна кулминация – най-високо над хоризонта). Това е точката на лятното слънцестоене. От прости геометрични съображения следва, че тази точка трябва да е в средата на дъгата от окръжността между началото на пролетта и началото на есента. Аналогично началото на зимата – точката на зимно слънцестоене – трябва да разполовява точно дъгата от другата страна на окръжността. (В действителност това не се случва точно така и причините са в елиптичността на земната орбита, неравномерното движение на Земята по нея и несъвпадението на моментите на преминаване през перихелий и афелий с моментите съответно на зимно и лятно слънцестоене). Приблизителното положение на Земята според древния астрономически модел можем да получим, като свържем с права линия точките, обозначаващи началото на лятото и на зимата. Тогава Земята трябва да е в пресечната точка на двете прави.

3 задача. На 19 юли 1969 г. в 17h 27m 52s UT (Универсално време) космическият кораб Аполо 11 навлиза в екваториална орбита около Луната. Максималната височина на орбитата над лунната повърхност е 121.7 км, а минималната – 99.6 км. От кораба се отделя спускаемият модул и каца в Морето на спокойствието, близо до лунния екватор. Астронавтите Н. Армстронг и Е. Олдрин стават първите хора, стъпили на Луната. След завръщането им на кораба с пилот М. Колинз, те се отправят обратно към Земята на 22 юли в 04h 55m 42s UT.

Колко обиколки е направил Аполо 11 около Луната?

Колко време е изминавало между две последователни прелитания на кораба над лунния модул?

Решение:

Интервалът от време, през който корабът Аполо 11 е бил в орбита около Луната, е равен на разликата във времената между 17h 27m 52s UT на 19 юли до 04h 55m 42s UT на 22 юли, или общо $t = 59.464$ часа.

Голямата полуос на орбитата на Аполо 11 около Луната е била:

$$a = R_L + \frac{1}{2}(h_{\min} + h_{\max}) \approx 1848.7 \text{ km}$$

където R_L е радиусът на Луната, а $h_{\min}$ и $h_{\max}$ са съответно минималната и максималната височина на орбитата над лунната повърхност. Орбиталния период на кораба T определяме от III закон на Кеплер:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma M_L}{4\pi^2}$$

където γ е гравитационната константа, а M_L е масата на Луната. Получаваме:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\gamma M_L}} \approx 7129 \text{ s} \approx 1.980 \text{ h} \approx 1 \text{ h } 58 \text{ m } 49 \text{ s}$$

Броя направени обиколки намираме като разделим общото време в орбита около Луната на орбиталния период:

$$N = t/T \approx 30 \text{ обиколки}$$

За да пресметнем точния интервал от време T_1 между две последователни прелитания на кораба над мястото на кацане на лунния модул, трябва да отчетем околоосното въртене на Луната. То става с период, равен на сидеричния лунен месец T_L . Ако допуснем, че корабът Аполо 11 се е движил около Луната в същата посока, в която тя се върти около оста си, то:

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_L}$$

$$T_1 = \frac{T T_L}{T_L - T} \approx 1.986 \text{ h} \approx 1 \text{ h } 59 \text{ m } 11 \text{ s}$$

Ако Аполо 11 се движи в обратната посока, то:

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T} + \frac{1}{T_L}$$

$$T_1 = \frac{T T_L}{T_L + T} \approx 1.974 \text{ h} \approx 1 \text{ h } 58 \text{ m } 28 \text{ s}$$

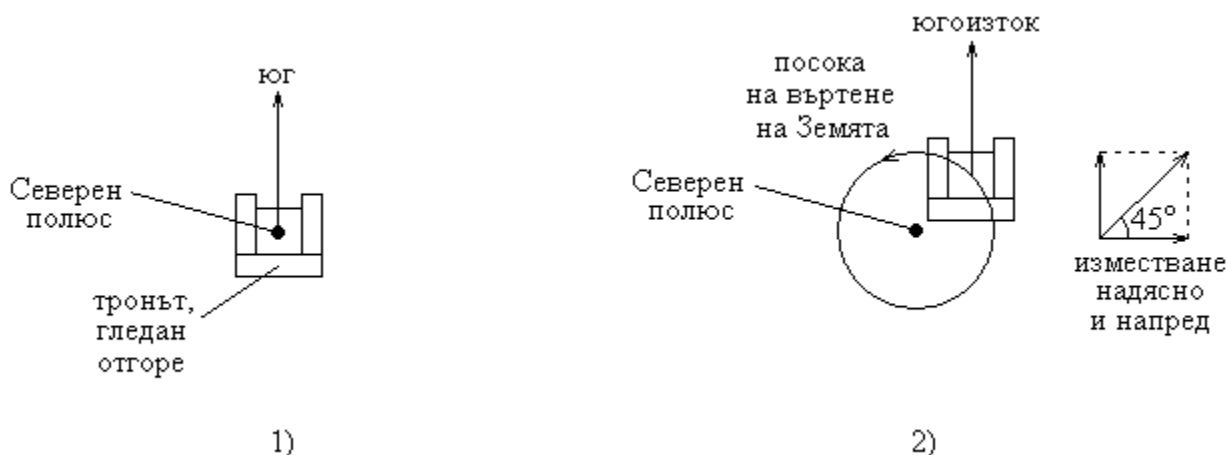
4 задача. В студена зимна нощ при вас се явява Снежната царица и ви отвлича в ледения си дворец. За да се освободите от коварната ѝ магия, трябва да отговорите на нейните въпроси:

Тронът на царицата е в средата на двореца, точно там, където се намира Северният полюс. Какво трябва да се направи, така че тронът, без да се върти, да застане обърнат на югоизток?

Тронът след това се превръща във вълшебна шейна, която изминава 1° по земната повърхност за една минута. и се движи само на югоизток. За колко време той ще обиколи Земята?

Какви биха били вашите отговори?

Решение:



Както и да е ориентиран първоначално тронът на царицата, щом е точно на Северния полюс, той е обърнат на юг. За да го поставим обърнат на югоизток, без да го завъртаме, трябва да го отместим малко от Северния полюс. Това отместване трябва да е в посока надясно и напред от гледна точка на царицата, седнала в трона. Така тя ще се окаже на малък паралел около Северния полюс, полуобърната по посока на въртенето на Земята и полуобърната на юг – следователно ще бъде обърната на югоизток. За точка, съпадаща със Северния полюс, всички направления са само на юг. Но дори и при най-малко отместване от Северния полюс бихме се озовали в точка, за която вече могат да се дефинират всички посоки на света.

Ако тръгнем с шейната от тази точка и се движим само на югоизток, ще пресичаме всички земни паралели под ъгъл от 45° . Така ние ще се движим по спирала, която отначало ще се отдалечава от Северния полюс към екватора, а после безкрайно дълго ще се приближава към Южния полюс. Дори и да смятаме, че ще стигнем до него, обаче, оттам няма да можем да продължим без да нарушим правилото да се движим през цялото време само на югоизток. Така че, ще останем завинаги там и никога няма да можем да обиколим Земята. Както се оказва, Снежната царица е наистина коварна.

5 задача. В резултат на приливното взаимодействие между Земята и Луната, нашият естествен спътник постепенно се отдалечава от нас с около 4 см на година. След колко време на Земята ще престанат да се наблюдават пълни слънчеви затъмнения?

Решение:

Понастоящем се наблюдават пълни слънчеви затъмнения, защото в определени случаи видимият ъглов размер на Луната е по-голям или равен на този на Слънцето. Но понякога, когато Луната е близо до апогея на своята орбита около Земята, например, едно слънчево затъмнение, дори и да е централно, може да не е пълно, а пръстеновидно – Луната закрива централната част от видимия слънчев диск, а по периферията остава един тесен светъл пръстен. Най-благоприятните обстоятелства за наблюдение на пълно слънчево затъмнение са, когато Луната е най-близо до Земята, т.е. в перигей, лунната сянка попада върху участък от земното кълбо, който е най-близо до Луната (за който Луната е в зенита), а Земята е най-далеч от Слънцето, т.е. в афелий. Да означим с r_L разстоянието от Земята до Луната в перигей, а с α_s – ъгловия радиус на Слънцето, когато Земята е в афелий. Най-близкото разстояние, от което земен наблюдател може да вижда Луната, е $r = r_L - R_T$, където R_T е радиусът на Земята. За да престанат да се наблюдават пълни слънчеви затъмнения, трябва при тези изброени обстоятелства видимият ъглов размер на Луната α_L да стане по-малък от ъгловия размер на Слънцето:

$$\alpha_L = \frac{R_L}{r_L - R_T} < \alpha_s$$

където R_L е линейният радиус на Луната. В наше време $\alpha_L > \alpha_s$. За да се изравнят тези видими ъглови радиуси, е необходимо разстоянието до Луната да се увеличи с $d.t$, където $d = 4$ см е разстоянието, с което се отдалечава Луната за една година, а t е броят години, които трябва да изминат. За t получаваме следното уравнение:

$$\frac{R_L}{r_L - R_T + d.t} = \alpha_s$$

Не бива да забравяме да превърнем α_s от дъгови минути в радиани. От уравнението получаваме:

$$t = \frac{R_L - \alpha_s(r_L - R_T)}{\alpha_s d}$$

$$t \approx 573 \times 10^6 \text{ години.}$$

Забележка: В справочните данни вместо видимия ъглов радиус на Слънцето при афелий – 15'.75 (дъгови минути), погрешно беше даден видимият ъглов радиус на Слънцето при перихелий – 16'.3 **При използване на тази стойност се получава $t \approx 264 \times 10^6$ години, което се зачита за правилен резултат при проверката на писмените работи.**

Справочни данни:

Период на прецесия на земната ос – 26 000 години

Разстояние от Земята до Луната в перигей – 363 000 km

Видим ъглов радиус на Слънцето при афелий – 15'.75 (дъгови минути)

Радиус на Луната – 1738 km

Радиус на Земята – 6378 km

Маса на Луната – 7.35×10^{22} kg

Гравитационна константа – $\gamma = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg.s}^2$

Сидеричен лунен месец – 27.3 денонощия